Intensivos 2018

MA1112 - Matemáticas II

Solución Parcial 1 (35 %)

Pregunta 1

Sea $f(x) = 2 - x - x^2$.

a) (4 ptos.) Halle la suma de Riemann de la función $f(x)$ para la partición $\mathcal{P} = \left\{-3, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ del intervalo $[-3, 1]$ y los puntos muestra definidos como el punto medio de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, 3$ y 4.

b) (6 ptos.) Determine $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ mediante sumas de Riemann, empleando particiones regulares.

c) (2 ptos.) Compruebe el resultado de la parte b) haciendo uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución

a) Tenemos $f(x) = 2 - x - x^2 = (x+2)(1-x)$, y con la partición $\mathcal{P} = \left\{ -3, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ se generan cuatro subintervalos.

$$\begin{array}{lcc lcc}
\Delta x_1 & = & -1-(-3) = 2 & \bar{x_1} & = & (-3-1)/2 = -2 \\
\Delta x_2 & = & -1/2-(-1) = 1/2 & \bar{x_2} & = & (-1-1/2)/2 = -3/4 \\
\Delta x_2 & = & 0-(-1/2) = 1/2 & \bar{x_3} & = & (-1/2+0)/2 = -1/4 \\
\Delta x_4 & = & 1-0 = 1 & \bar{x_4} & = & (0+1)/2 = 1/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcc}
f(\bar{x_1}) & = & (-2+2)(1-(-2)) = 0 \\
f(\bar{x_2}) & = & (-3/4+2)(1+3/4) = 35/16 \\
f(\bar{x_3}) & = & (-1/4+2)(1+1/4) = 35/16 \\
f(\bar{x_4}) & = & (1/2+2)(1-1/2) = 5/4
\end{array}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x_i})\Delta x_i \\
&= f(\bar{x_1})\Delta x_1 + f(\bar{x_2})\Delta x_2 + f(\bar{x_3})\Delta x_3 + f(\bar{x_4})\Delta x_4 \\
&= \cancel{(2)(0)} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{35}{16}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{35}{16}) + (1)(\tfrac{5}{4}) \\
&= \tfrac{35}{16} + \tfrac{5}{4} \\
&= \tfrac{35}{16} + \tfrac{20}{16} \\
&= \tfrac{35+20}{16} = \boxed{\frac{55}{16}}
\end{aligned}$$

b) Buscamos primero la suma de Riemann, $R_{\mathcal{P}}$, y luego tomaremos el límite para determinar la integral definida. Como tomaremos una partición uniforme entonces $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{1-(-3)}{n} = \dfrac{4}{n}$.

Luego, como $x_0 = -3$, entonces $x_i = -3 + i\Delta x = -3 + i\frac{4}{n}$. Emplearemos como puntos muestra el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Así, $\bar{x_i} = x_i = -3 + i\frac{4}{n}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(\bar{x_i}) &= 2 - (x_i) - (x_i)^2 \\
&= 2 - (-3 + i\tfrac{4}{n}) - (-3 + i\tfrac{4}{n})^2 \\
&= 5 - i\tfrac{4}{n} - (9 - i\tfrac{24}{n} + i^2\tfrac{16}{n^2}) \\
&= -i^2\tfrac{16}{n^2} + i\tfrac{20}{n} - 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})\Delta x_i \\
&= \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i}) \\
&= \tfrac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}(-i^2\tfrac{16}{n^2} + i\tfrac{20}{n} - 4) \\
&= -\tfrac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \tfrac{80}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \tfrac{16}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= -\tfrac{64}{n^3}\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \tfrac{80}{n^2}\tfrac{n(n+1)}{2} - \tfrac{16}{n}(n) \\
&= -\tfrac{32}{3n^2}(2n^2+3n+1) + \tfrac{40}{n}(n+1) - 16 \\
&= -\tfrac{64}{3} - \tfrac{32}{n} - \tfrac{32}{3n^2} + 40 + \tfrac{40}{n} - 16 \\
&= 24 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{8}{n} - \tfrac{32}{3n^2} \\
&= \tfrac{8}{3} + \tfrac{8}{n} - \tfrac{32}{3n^2}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_{-3}^{1}(2 - x - x^2)dx = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} R_{\mathcal{P}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{n} - \frac{32}{3n^2}\right) = \boxed{\frac{8}{3}}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} f(x)dx &= \int_{-3}^{1}(2 - x - x^2)dx \quad \text{(Integrando y usando 2do TFC)} \\
&= \left[2x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} \\
&= (2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (-6 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{9\cdot 3}{3}) \\
&= 2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - (3 - \tfrac{9}{2}) \\
&= 3 - \tfrac{1}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}
\end{aligned}$$

Pregunta 2

Resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x-4)\cos\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}{4\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{6\operatorname{arc\,tg}(3x)-36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$

Solución

a) Hacemos el cambio: $\boxed{u=\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}$ y así $du=\dfrac{2\operatorname{sen}(x-2)\cos(x-2)dx}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}=$ $\dfrac{\operatorname{sen}(2(x-2))dx}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}$, de donde $\boxed{2du=\dfrac{\operatorname{sen}(2x-4))dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}}$

Sustituyendo en la integral, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}(2x-4)\cos\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \cos u(2du)\\
&= \frac{1}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C \qquad \text{(Devolviendo el cambio)}\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-2)})+C} \qquad \text{(Con } C \text{ constante)}
\end{aligned}$$

b) Separamos la integral como:

$$\int \frac{6\operatorname{arc\,tg}(3x)-36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{3\operatorname{arc\,tg}(3x)}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolvemos la primera integral. Hacemos el cambio $\boxed{u=\operatorname{arc\,tg}(3x)}$, y entonces $\boxed{du=\dfrac{3}{1+9x^2}dx}$.

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
2\int \frac{3\operatorname{arc\,tg}(3x)}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int u du \\
&= \int 2u du \\
&= u^2 + C_1 \quad \text{(Devolviendo el cambio)} \\
&= \operatorname{arc\,tg}^2(3x) + C_1 \quad \text{(Con } C_1 \text{ una constante)}
\end{aligned}
$$

Resolvemos la segunda integral. Haciendo división de polinomios obtenemos que $\frac{36x^2}{1+9x^2} = 4 - \frac{4}{1+9x^2}$. Sustituimos esto en la integral y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
-\int \frac{36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \Big(\frac{4}{1+9x^2} - 4\Big)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Aplicando propiedades, y haciendo } u = 3x \text{ en la primera)} \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{du}{1+u^2} - 4\int dx \\
&= \frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg} u + C_2 - 4x + C_3 \quad \text{(Devolviendo el cambio de la primera)} \\
&= \frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}(3x) - 4x + C_4 \quad \text{(Con } C_4 = C_2 + C_3 \text{ una constante)}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{6\operatorname{arc\,tg}(3x) - 36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{3\operatorname{arc\,tg}(3x)}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{36x^2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= (\operatorname{arc\,tg}^2(3x) + C_1) + (\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}(3x) - 4x + C_4) \\
&= \boxed{\operatorname{arc\,tg}^2(3x) + \frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}(3x) - 4x + C} \quad \text{(Con } C = C_1 + C_4 \text{ constante)}
\end{aligned}
$$

Pregunta 3

Sea $g(x) = \int\limits_1^x \sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t$. Calcule la longitud de la curva $y = g(x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución

La fórmula para la longitud de una curva en nuestro caso viene dada por

$$L = \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{1 + [g'(x)]^2}dx$$

Luego, utilizando el 1TFC, tenemos que $g'(x) = \sqrt{x+1}$. Entonces $[g'(x)]^2 = x+1$, y así $\sqrt{1+[g'(x)]^2} = \sqrt{x+2}$.

Sustituyendo en la fórmula inicial, obtenemos:

$$\begin{aligned} L &= \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\, dx \quad \text{(Integrando y usando el 2TFC)} \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{2}{3}\left[(4)^{3/2} - (1)^{3/2}\right] \\ &= \frac{2}{3}[8-1] \\ &= \boxed{\frac{14}{3}} \end{aligned}$$

Pregunta 4

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces no existe un valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ sea igual al valor promedio de la función en dicho intervalo.

b) El número $c = \sqrt{3}$ satisface la tesis del Teorema del Valor Medio para integrales para $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 3]$.

Solución

a) **Falso**. El Teorema del Valor Medio para integrales establece que si f es una función continua en $[a, b]$ entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c)$ es igual al valor promedio de la función en dicho intervalo. Más aún, se satisface la fórmula:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = prom(f)$$

b) **Verdadero**. Como $f(x) = 1 - x^2$ es continua en el intervalo $[0, 3]$, el TVM para integrales asegura que existe un $c \in [0, 3]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{3-0} \int_0^3 (1 - x^2)dx$$

Resolvemos la integral haciendo uso del Segundo TFC:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int_0^3 (1 - x^2)dx &= \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left[(3 - \frac{3^3}{3}) - (0)\right] \\ &= \frac{1}{3}(-6) = -2 \end{aligned}$$

Luego, $f(c) = 1 - c^2 = -2$. Despejando c, obtenemos que $c = \pm\sqrt{3}$. Pero como $c \in [0, 3]$, entonces $\boxed{c = \sqrt{3}}$, como se quería demostrar.

Pregunta 5

Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{7\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2} & , \text{si } x < \pi \\ \\ \left|\cos \frac{x}{2}\right| & , \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Solución

Por la naturaleza de la función es necesario dividir la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{7\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{7\pi} f(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2} dx + \int_{\pi}^{7\pi} \left|\cos \tfrac{x}{2}\right| dx \end{aligned}$$

Resolvemos la primera integral, que como tiene límites de integración simétricos chequeamos la paridad de la función del integrando. Sea $g(x) = \dfrac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2}$, entonces

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{3(-x)^2 \operatorname{sen}((-x)^3)}{\big(1+\cos((-x)^3)\big)^2} \\ &= \frac{3x^2 \operatorname{sen}(-x^3)}{\big(1+\cos(-x^3)\big)^2} \\ &= \frac{-3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2} = -g(x) \end{aligned}$$

Por tanto, $g(x)$ es una función impar y por el Teorema de simetría tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2} dx = 0$$

Ahora resolvemos la segunda integral. Hacemos primero un cambio de variable $\boxed{u = \dfrac{x}{2}}$, y así $\boxed{2du = dx}$. Cambiando los límites de integración: Si $x = \pi$

o $x = 7\pi$, entonces $u = \frac{\pi}{2}$ o $u = \frac{7\pi}{2}$, respectivamente. De modo que la integral queda:

$$\int_{\pi}^{7\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx = 2 \int_{\pi/2}^{7\pi/2} |\cos u|\, du$$

La función $|\cos u|$ tiene periodo π. Entonces, dividiendo la integral y utilizando el Teorema de periodicidad reiteradas veces obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\int_{\pi/2}^{7\pi/2} |\cos u|\, du &= 2\left[\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} |\cos u| du + \int_{5\pi/2}^{7\pi/2} |\cos u| du\right] \\
&= 2\left[\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du\right] \\
&= 2\left[3\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du\right] \\
&= 6\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u| du \quad (\text{Pero } \cos u \leq 0 \text{ si } u \in [\pi/2, 7\pi/2]) \\
&= 6\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos u) du \\
&= -6\,[\operatorname{sen} u]_{\pi/2}^{7\pi/2} \\
&= -6\big(\operatorname{sen}(7\pi/2) - \operatorname{sen}(\pi/2)\big) \\
&= -6(-1-1) = 12
\end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int_{\pi}^{7\pi} \left|\cos \tfrac{x}{2}\right| dx = 2\int_{\pi/2}^{7\pi/2} |\cos u|\, du = 12$

Finalmente, sustituyendo en la integral original:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{7\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\big(1+\cos(x^3)\big)^2} dx + \int_{\pi}^{7\pi} \left|\cos \tfrac{x}{2}\right| dx \\
&= (0) + (12) = \boxed{12}
\end{aligned}$$